*98× E.N.S.I. CHIMIE GROUPE NORD 1977

# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. — *Les parties* II et III *dépendent en grande partie des résultats obtenus dans la partie* I.

La notation $a_n \sim b_n$ signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon$ de $n$, tendant vers 0 lorsque $n$ augmente indéfiniment, telle que $a_n = b_n (1 + \varepsilon (n))$.

## I

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}}.$$

On désignera par (G) son graphe.

1° Déterminer le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3, au voisinage de 0, ainsi que le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $\pi$.

2° Étudier le signe de $f(x) - \sin x$, $x$ variant dans $[0, \pi]$. En déduire le signe de $f(x) - x$ pour tout $x$ dans $[0, \pi]$.

Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on $f(x) = x$?

3° Étudier les variations de $f$. Tracer (G).

Démontrer que $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ; préciser les variations de $f$ sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

4° On pose sur $]0, \pi[$

$$r(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x}, \quad s(x) = \frac{1}{(f(x))^2} - \frac{1}{x^2}.$$

Déterminer les limites lorsque $x$ tend vers 0 de $r(x)$, $\frac{r(x)}{x}$, $s(x)$.

Donner la partie principale de $r(x)$ lorsque $x$ tend vers 0.

## II

$f$ désigne la fonction étudiée en I.

On définit à partir de $f$ une suite réelle $(u_n)$ par son premier terme $u_0 = u$, $u \in [0, \pi]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1° Étudier la suite $(u_n)$. Prouver qu'elle est convergente et préciser sa limite.

*On écartera désormais les cas* $u = 0$ *et* $u = \pi$.

2° Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ ?

En utilisant I 4°, donner la nature de la série de terme général $u_n$.

3° *a.* Démontrer que, si une suite réelle $(v_n)$ converge vers une limite L quand $n$ tend vers $+\infty$, la suite $w_n = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}$ converge également vers L quand $n$ tend vers $+\infty$.

*b.* Déterminer la limite de $\frac{1}{(u_{n+1})^2} - \frac{1}{(u_n)^2}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

Utiliser le *a.* pour prouver que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{7n}}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

*c.* Déduire de l'étude précédente la nature des séries de termes généraux $u_n$, $u_n^2$, $u_n^3$, ..., $u_n^\alpha$.

.../...

4° D'après la définition donnée de $(u_n)$ celle-ci dépend de son premier terme $u_0 = u$, et de $f$. On notera que $u_n$ peut encore s'écrire $u_n = f_n(u)$, $f_n$ étant la composée $f \circ f \circ \ldots \circ f$ $n$ fois.

*a.* En utilisant le I 3° comparer $f_n(u)$ et $f_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ pour $n \geq 1$.

*b.* Calculer la limite de $I_n = \int_0^{\pi} f_n(u)\,du$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## III

Soit $g$ la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall x \in [0, \pi] \quad g(x) = \operatorname{Arc\,cos}\left(\frac{4 - 5\cos x}{5 - 4\cos x}\right).$$

On désignera par $(G')$ son graphe.

1° Vérifier que $g$ est bien définie. Calculer, en fonction de $x$, $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.

2° Déterminer la dérivée $g'$ de $g$ sur $[0, \pi[$.

Déterminer la limite de $g'(x)$ lorsque $x$ tend vers 0, ainsi que vers $\pi$.

Déterminer le tableau de variations de $g$. Tracer $(G')$; on précisera sa concavité.

3° Soit $x$ un élément variable de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

*a.* Démontrer qu'il existe un unique élément $z$ de $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, tel que $f(z) = f(x)$.

*b.* Déterminer une relation entre $\cos x$ et $\cos z$.
Prouver que $z = g(x)$.

*c.* Donner en fonction de $x$ seulement les quatre valeurs :

$\cos(x + z)$, $\cos(x - z)$, $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)$. Pour les deux dernières on peut être amené à étudier les fonctions $x \mapsto x + g(x)$ et $x \mapsto x - g(x)$.

**Tournez la page S. V. P.**



4° *a.* Prouver que $f$ admet sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ une fonction réciproque notée $\varphi$.

*b.* En utilisant les expressions de $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)$ en fonction de $x$, déterminer l'expression de la fonction $\varphi$.

## Barème

| | |
|---|---|
| PARTIE I | *5 points* |
| PARTIE II | *7 points* |
| PARTIE III | *8 points* |

×99×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail